Mátrixok és determinánsok

A számok egyfajta táblázatát ***mátrixnak*** hívjuk. A mátrixok használhatósága igen sokrétű kezdve a matematikával, folytatva a számítástechnikán és a fizikán keresztül, egészen az elektrotechnikáig.

Definíció 1. Az ***m x n*** típusú táblázatot

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

mátrixnak hívjuk, ahol m,n ∈ R. A mátrix ***i , j*** helyén lévő számot a mátrix elemének hívjuk, jelölése $\boldsymbol{a_{ij}}$, i,j ∈ R.

A mátrixokat mind írásban, mind nyomtatásban az ABC nagy betűivel jelöljük kétszer aláhúzva, pl. $\underline{\underline{A}}$.

Tétel 1.
Minden mátrix sorokból és oszlopokból áll. A mátrix *i*-edik sora

$$\underline{R}_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}),\ i \in R ,$$

egy m x 1 típusú mátrix (egyben az előző felírás vektornak is értelmezhető). A mátrix *j*-edik oszlopa

$$\underline{C}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\ j \in R ,$$

egy 1 x n típusú mátrix. Az $\boldsymbol{a_i}$, i ∈ R elemek a mátrix átlóját alkotják.

1. példa

Adott az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ mátrix.}$$

Oldja meg a következő feladatokat:

a) Állapítsa meg a mátrix típusát.
b) Sorlja fel a mátrix elemeit.
c) Sorolja fel a mátrix sorait és oszlopait.
d) Mely elemek alkotják a mátrix átlóját?

Megoldás

a) A mátrix 3x2 -es.
b) A mátrix elemei: 1, 2, 3,-3, 0, $\frac{1}{2}$.
c) A mátrix sorai: (1,2,3) és (-3,0, $\frac{1}{2}$). A mátrix oszlopai: $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
d) A métrix átlóját az 1 és a 0 alkotja.

Gyakorlat

Oldja meg önállóan az 1. példa alapján:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 21 & -2 \\ -\frac{3}{4} & -1 & 0,5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0,5 & 10 & 1 & 0 \\ -0,5 & 100 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Definíció 2. Az *n x n* típusú mátrixot n-edfokú négyzetes mátrixnak hívjuk.

Definíció 3. Azt a négyzetes mátrixot, mely a diagonálisban csak egyeseket tartalmaz és azon kívül csak nulla alkotja, *egységmátrixnak* hívjuk. Jelölése $\underline{\underline{E}}$ vagy $\underline{\underline{I}}$.

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Definíció 4. Legyen adott $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$. A két mátrix között az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha elemenként egyenlőek.

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j \in R$$

Tétel 2.

Meg kell jegyezni, hogy az egyenlőség csakis azonos típusú mátrixoknál áll fenn.

2. példa

Határozza meg, mely estekben lesz egyenlő a két mátrix.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & a-2 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Megoldás

A definíció alapján tudjuk, hogy két mátrix csak akkor egyenlő, ha elemenként megegyeznek. Ebből következik, hogy x = 2 és a - 2 = 2 → a = 4.

Gyakorlat

Állapítsa meg, hogy a két mátrix mikor lesz egyenlő, esetleg egyenlő-e, ha nem egyenlő indokolja meg miért.

a) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} c & 6 & 5 \\ 4 & b-5 & 2 \\ 4 & 5 & f \end{pmatrix}$

b) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} k & 2 & g \\ 0 & 2-j & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 5l \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 25 \end{pmatrix}$

c) $\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ \frac{1}{2} & -1 & 5\end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ \frac{1}{2} & -1 & 5\end{pmatrix}$

d) $\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & c\end{pmatrix}$, $\underline{\underline{E_4}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Definíció 5. Azt a *m x n* típusú mátrixot, ahol csak az átlóban és felette találhatóak nullától különböző elemek, ***felsőháromszögű*** mátrixnak hívjuk. Azt a *m x n* típusú mátrixot, ahol csak az átlóban és alatta találhatóak nullától különböző számok, ***alsóháromszögű*** mátrixnak hívjuk.

Példa.

$\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5 & 4\\ 0 & 2 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ és $\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -10 & 2 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 5 & 0\\ 2 & 10 & 20 & 1\end{pmatrix}$

Definíció 6. Az $\underline{\underline{A^T}}$ mátrixot, mely az oszlopok, és sorok kölcsönös felcseréléséből jön létre, a mátrix *transzponáltjának* hívjuk.

Példa.

Legyen

$\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, akkor a mátrix transzponáltja $\underline{\underline{A^T}}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$.

Tétel 3. Az egységmátrixokra érvényes $\underline{\underline{E}}=\underline{\underline{E^T}}$.

Gyakorlat

Milyen számokat kell behelyettesíteni a betűk helyére, hogy felsőh. és alsóh. mátrixokat kapjunk? Transzponálja a mátrixokat.

a) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ e & d & 9 \end{pmatrix}$ b) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & g & 3-h \\ 4 & 5 & 6-f \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

c) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2-a & 3-b \\ 4-f & 5 & -6-n \\ 7 & 8 & 9-k \end{pmatrix}$

Definíció 7. Ha egy mátrixra érvényes, hogy $a_{ij} = -a_{ji}$, akkor mátrix *antiszimetrikus*. Ha egy mátrixra érvényes, hogy $a_{ij} = a_{ji}$, akkor szimmetrikus mátrixról beszélünk.

Példa.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Definíció 8. Azt a mátrixot, melynek minden eleme nulla, *nullmátrixnak* hívjuk. Jelölése $\underline{\underline{0}}$.

Definíció 9. *Diagonális mátrixnak* hívjuk azt a *m x n* típusú mátrixot, amelyre érvényes

$a_{ii} = 1$; i = 1,2,3,…,n és $a_{ij} = 0$; $i \neq j$.

Példa.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Definíció 10. Mátrixok összeadása kommutatív és asszociatív is egyben. Végrehajtása elemenként történik, vagyis a két mátrix elemeit megfelelő helyen összeadjuk.

Példa.

$$\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&6\\3&6&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&2+1&3+1\\2+2&5+2&6+2\\3+3&6+4&9+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\4&7&8\\6&10&14\end{pmatrix}$$

Tétel 4. Az összeadás csakis két azonos típusú mátrix között lehetséges.

Definíció 11. Azt az $m\ x\ n$ típusú mátrix és egy skalár $\lambda \in R$ szorzata egy $m\ x\ n$ típusú mátrix $\lambda\underline{\underline{A}}=\lambda\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\cdots&\lambda a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\\lambda a_{m1}&\cdots&\lambda a_{mn}\end{pmatrix}$.

Definíció 12. Legyen $\underline{\underline{A_{mxn}}}$ és $\underline{\underline{B_{nxp}}}$. A szorzatuk $\underline{\underline{A_{mxn}}}.\underline{\underline{B_{nxp}}}$ egy $n\ x\ p$ típusú mátrix.

Tétel 5. Mátrixok szorzása nem komutatív, nem cserélhető fel.

3. példa

Legyen $\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ és $\underline{\underline{B}}=\begin{pmatrix}1&4&1\end{pmatrix}$. Bizonyítsuk be, hogy a szorzás nem komutatív.

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix 3x1 és a $\underline{\underline{B}}$ 1x3. Szorozzuk össze kétféle képpen.

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&8&2\\1&4&1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}1&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=1.1+4.2+1.1=1+8+1=10$$

Láthatjuk, hogy a két végeredmény nem ugyanaz.

Gyakorlat

Végezze el a műveleteket.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $3\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) $-1\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Mi lesz a végeredménye a következő szorzatnak?

$\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{0}} = ?$

Számolja ki a mátrix négyzetét és köbét.

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ellenőrző kérdések:

1. Hogyan magyarázná el a mátrix fogalmát?
2. Mit jelent az, hogy a mátrix 3 x 2 –es típusú?
3. Mi a szimmetrikus és antiszimmetrikus mátrix?
4. Mi a mátrix diagonálisa?
5. Mikor mondjuk, hogy két mátrix egyenlő?
6. Milyen mátrix a felsőhásromszög mátrix?
7. Hogyan adunk össze két mátrixot? Szemléltesse példával.
8. Összeadható-e két nem azonos típusú mátrix?

Minden n-edfokú mátrixhoz egyértelműen hozzárendelhető egy szám. Ezt a számot hívjuk determinánsnak.

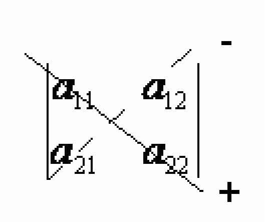
Definíció 13. Egy mátrix determinánsa az a szám, amit $\det \underline{\underline{A}}$-val jelölünk, mely a következő képpen van definiálva:

a) n = 1-re $\det \underline{\underline{A}} = a_{11}$

b) $n - 1 \geq 1$ esetén pedig $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det \underline{\underline{A}}_{1j}$, amely sorbafejtést jelent a j-edik oszlop alapján.

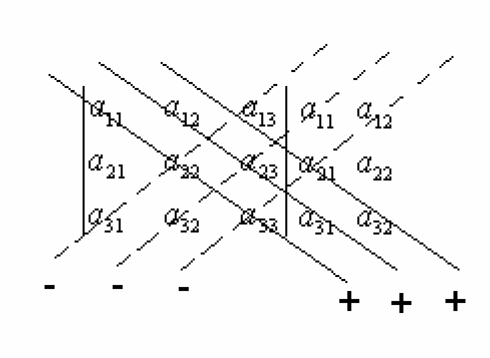
Tétel 6.

Sarrus szabály



Szétírva:

$$\det \underline{\underline{A}} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$



Szétírva:

$$\det \underline{\underline{A}} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Tétel 7.

Ha a determináns egy oszlopot vagy sort tartlamaz, amely csak nullákból áll, a végeredmény nulla lesz.

Ha egy determinánsban két egyforma sor van, akkor a végeredmény nulla lesz.

Ha egy determináns felsőh. determináns, akkor a végeredmény az átlóban lévő számok szorzata.

TIPP!!!

Hogyan számoljuk ki egy harmadfokú mátrix determinánsát a sorbafejtés segítségével?

Lássunk egy példát.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Mivel az ember lusta, ebbúl kiindulva keressünk a mátrixunkban olyan sort vagy oszlopot, ahol több a nulla. Ezzel időt és energiát spórolunk meg. Nézzük akkor a példát.

Válasszuk ki a középső sort, és képzeletben takarjuk le.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Most pedig írjuk szét:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = +0.\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - 1.\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + 1.\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ezt a szétírást a következőképpen kaptuk:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

képzeletben letakartuk az általunk kiválasztott sort és az első oszlopot. A kiválasztott sorunkból a nullát a, mivel első szám pozitív előjellel leírtuk és a fennmaradó számok adta szubdeterminánst kiszámoljuk. A követkető lépésben letakartuk a középső oszlopot és a számot a sorunkból negatív előjellel írtuk le. Az előjelek ciklikusan változnak. Most pedig fejezzük be a számolást.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = +0.\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - 1.\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + 1.\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$-[1.0-(-2.3)]+[-3-(-2.2)] = -6+(-3+4) = -6+1 = -5$$

Gyakorlat

a) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$

e) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\det\begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

h) $\det\begin{pmatrix} 1 & 15 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

i) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

j) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ellenőrző kérdések:

1. Mi az a determináns?
2. Mit jelent az i-edik sor szerinti sorba fejtés?
3. Mi a Sarrus-szabály?

Mátrixok és determinánsok alkalmazása

Az egyik leggyakrabb terület, ahol mátrixokat alkamazunk, az egyenletrendszerek megoldása. A legismertebb szabály a Crammer-szabály. Legyen egy egyenletrendszerünk

$$\underline{\underline{A}}.\underline{x} = \underline{y}$$

ahol

$\underline{\underline{A}}$ a koeficiensek mátrixa,

$\underline{x}$ a megoldások vektora,

$\underline{y}$ az egyenlet jobb oldala.

Akkor az egyenletrendszer megoldásai a következőek:

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

ahol

D_i az a determináns, ahol az i-edik oszlopban az egyenletek jobb oldala található,

D pedig a fő determináns.

Példa

Adott a következő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= -2 \\ -3x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned}$$

majd írjuk át mátrix formájába

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>Megoldás menete:</u>

Kiszámítjuk a ődeterminánst:

$$D = \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -1.1 - (2.-3) = -1 + 6 = 5$$

Most pedig az első oszlop helyére írjuk be az egyenletrendszer jobb oldalát:

$$D_1 = \det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -2.1 - (-1.2) = -2 + 2 = 0$$

majd a második oszlop helyére írjuk be az egyenlet jobb oldalát

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = -1.(-1) - [-3.(-2)] = 1 - 6 = -5$$

Ezen adatok ismeretében a Crammer-szabály alapjánki tudjuk számolni az egyenletrendszer megoldását.

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{0}{5} = 0$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-5}{5} = -1$$

Gyakorlat

Oldja meg a következő egyenletrendszereket.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 12x_2 &= 3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 - 4x_2 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 7x_1 - 3x_3 &= 1 \\ 2x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 12x_1 - 3x_2 &= 1 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 12x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 5 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= -8 \end{aligned}$